INTRODUCCIÓN

En economía nos interesa frecuentemente conocer la evolución temporal de determinadas variables, por ejemplo, el precio de un producto, el producto interior bruto de un país, el tipo de interés, la producción de petróleo, etc.

Esto implica buscar funciones o sucesiones que describan las trayectorias temporales de estas variables. Este es el objetivo del análisis dinámico en la economía, la modelización y el análisis de los procesos que evolucionan con el tiempo.

Es importante distinguir los casos en los que la variable tiempo deba ser considerada continua tomando todos los valores reales en un intervalo, de los casos en los que la variable tiempo deba ser considerada discreta, tomando solo valores enteros no negativos. Los modelos y métodos para tratar unos y otros son distintos.

De igual forma, es importante distinguir entre los llamados modelos determinísticos, la evolución del proceso en el tiempo tiene naturaleza determinista (no aleatoria), de los procesos probabilísticos (o estocásticos), en cuya modelización intervendrán factores de naturaleza aleatoria.

Al modelizar la evolución temporal de determinadas magnitudes, lo usual será establecer supuestos razonables sobre las relaciones entre ellas. Estas relaciones darán lugar a ecuaciones o sistemas de ecuaciones que pretenderemos resolver, tanto en el caso de que la variable tiempo deba ser considerada discreta (ecuaciones y sistemas de ecuaciones en diferencias) como cuando, dependiendo del contexto, pueda o deba ser considerada continua (ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales). Adicionalmente, habrá que tener en cuenta si tales relaciones son deterministas o, por el contrario, si tienen carácter probabilístico. Este último caso corresponde a los modelos denominados cadenas de Markov. Aclararemos a continuación estas cuestiones mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 1. El modelo de Malthus de evolución de una población en tiempo continuo

Es bien conocida la Ley de Malthus que se concreta en establecer que el ritmo de crecimiento de una población debe ser directamente proporcional a la población. Esto conduce a la paradoja de que mientras la humanidad crecería exponencialmente, los recursos lo harían linealmente. Formalmente tendríamos:

$$P'(t) = aP(t).$$

En este caso tenemos una ecuación diferencial que relaciona la variable $P(t)$ con su derivada $P'(t)$. El cálculo de primitivas permite de forma inmediata hallar la función que regiría la evolución temporal de la población a partir de un valor inicial conocido $P(0)$. Es decir, $P(t) = P(0)e^{at}$.

En general, las relaciones son más complicadas y para resolver las ecuaciones asociadas necesitaremos técnicas más avanzadas.

Ejemplo 2. El modelo de Malthus de evolución de una población en tiempo discreto

La adaptación de la ley de Malthus a tiempo discreto resulta inmediata. Ahora, el incremento de la población de un periodo t (día, mes, año, …) al siguiente, es directamente proporcional a la población en t. Es decir, $P_{t+1} - P_t = \alpha P_t$, que también puede expresarse como

$$P_{t+1} = (1+\alpha)\, P_t .$$

En este caso tenemos una ecuación en diferencias que nos da la relación que hay entre los valores que toma la variable P_t entre dos periodos sucesivos. Esta sencilla ecuación puede resolverse por recurrencia. La solución $P_t = P_0(1+\alpha)^t$ nos dará el término general de una sucesión cuyos elementos constituyen una progresión geométrica. El comportamiento (crecimiento ilimitado o extinción) es similar a la solución (función exponencial) del caso en tiempo continuo.

Estos ejemplos también modelizan el capital acumulado dependiendo de la cantidad inicial y de la tasa de interés. Cuando los intereses se componen de forma continua tendremos una ecuación diferencial; cuando lo hacen de forma discreta tendremos una ecuación en diferencias.

Ejemplo 3. La isla de los zorros y los conejos

Supongamos una isla en la que conviven dos especies: zorros (Z) y conejos (C). Los conejos comen hierba, que se entiende disponible sin restricción, y los zorros comen conejos. Las poblaciones de una y otra especie en un periodo dado dependen de las poblaciones de unos y otros en el periodo anterior. Suponiendo que esta dependencia es lineal y que las reglas sobre las costumbres alimentarias y reproductivas no varían a lo largo del tiempo, llegamos a un modelo constituido por un sistema de dos ecuaciones en diferencias finitas:

$$\begin{aligned} C_{t+1} &= a_{11}C_t + a_{12}Z_t \\ Z_{t+1} &= a_{21}C_t + a_{22}Z_t. \end{aligned}$$

Este sistema se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} C_{t+1} \\ Z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ Z_t \end{pmatrix}.$$

Así, si conocemos las poblaciones de conejos y zorros en un periodo inicial dado, se tendría para el periodo siguiente:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ Z_0 \end{pmatrix},$$

y para el siguiente periodo:

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} C_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}.$$

En general, para un periodo t cualquiera se tendría:

$$\begin{pmatrix} C_t \\ Z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} C_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}.$$

Como vemos, para encontrar la solución de este sistema recurriremos al cálculo de potencias de matrices.

Ejemplo 4. Economía cerrada

A la hora de describir la evolución de una economía sin comercio exterior y sin impuestos pueden considerarse magnitudes macroeconómicas para las cuales solo tiene sentido considerar que el tiempo t es una variable discreta (año, por ejemplo) donde

Y_t: La renta nacional en un periodo t.

C_t: El consumo en un periodo t.

I_t : La inversión en un periodo t.

Podemos establecer supuestos razonables muy sencillos sobre sus relaciones:

S1. El consumo C_t en cada periodo t depende linealmente de la renta Y_{t-1} en el periodo anterior: $C_t = a + bY_{t-1}$.

S2. La inversión I_t para cada t depende también linealmente de la renta Y_{t-1} en el periodo anterior: $I_t = c + dY_{t-1}$.

S3. Condición de “equilibrio”: $Y_t = C_t + I_t$ para cualquier t.

A partir de los tres supuestos anteriores S1-S3, se obtiene finalmente la ecuación recurrente (o ecuación reducida del modelo) que describe la evolución temporal de la renta nacional. En definitiva,

$$Y_t = (b + d)Y_{t-1} + (a + c).$$

La ecuación obtenida es una ecuación en diferencias que resolveremos en el capítulo correspondiente.

Hasta aquí hemos visto ejemplos de modelos *dinámicos determinísticos*, es decir, modelos que en ningún caso incorporan elementos aleatorios. El siguiente y último ejemplo se corresponde con un modelo *dinámico probabilístico*, entendiendo como tal un modelo cuya evolución en el tiempo sí que incorpora probabilidades.

Ejemplo 5. El modelo Boom-Bust

Sea una economía que puede encontrarse solo en uno de los dos siguientes estados: *Boom* (expansión) y *Bust* (contracción o recesión). Sea p la probabilidad de que estando la economía en el estado Boom en un determinado periodo (año, lustro, etc.) se mantenga en dicho estado en el periodo siguiente, entonces $1-p$ será la probabilidad de que la economía pase del estado Boom al estado Bust. Las interpretaciones de q y $1-q$ son, respectivamente, mantenimiento en Bust y paso de Bust a Boom. Debe cumplirse que $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq q \leq 1$. La información anterior puede ordenarse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}.$$

Es importante notar que los elementos de esta matriz son no negativos y que la suma de los elementos de cada columna es igual a 1. Las matrices de este tipo se denominan *matrices estocásticas*.

Este ejemplo corresponde a un modelo dinámico probabilístico que cumple la *propiedad de Markov*. Esto significa que las probabilidades que aparecen en la matriz del modelo son constantes para cualquier periodo. En definitiva, la matriz contiene toda la información relevante para predecir la evolución futura de la economía en este caso.

Este ejemplo, dado que la matriz es constante, es similar al de la isla de los zorros y conejos con la particularidad de que la matriz asociada es estocástica. Ambos problemas serán estudiados en el capítulo sobre sistemas de ecuaciones en diferencias finitas, que también incluirá el análisis de las *cadenas de Markov*.