

Introducció

Aquest llibre constitueix un tractat dedicat a l'estudi d'alguns temes bàsics i fonamentals de l'anàlisi real d'una variable real. Els objectius formatius bàsics que es persegueixen involucren els coneixements bàsics del cos dels nombres reals, l'estudi sobre les successions de nombres reals, manejar amb soltura diverses classes de funcions com eina per a resoldre una gran quantitat de problemes, el desenvolupament de nocions i tècniques matemàtiques al voltant de la continuïtat i derivabilitat, i en general conèixer i aprendre a utilitzar els conceptes i resultats fonamentals del càlcul diferencial d'una variable real. Per tant, aquest tractat està principalment pensat perquè els alumnes d'un primer curs universitari tinguin un manual bàsic de partida amb el qual inicien l'estudi de l'anàlisi matemàtica, que ha de servir de fonament i referència en posteriors cursos.

Els continguts que formen aquesta segona edició del manual han anat evolucionant gradualment: revisant el material, incorporant nous resultats, millorant sensiblement la presentació d'alguns temes, enllaçant els diferents resultats a través de comentaris, observacions i notes, establint una notació adequada, retocant algunes demostracions, introduint comentaris a nivell històric en cada un dels capítols, inserint noves gràfiques il·lustratives, incorporant una selecció adequada d'exercicis referents a cada apartat temàtic... fins a convertir-se en el present llibre que esperem que servisca de referència i ajuda per a una primera assignatura, a nivell d'estudis universitaris, vinculada a l'àrea d'anàlisi matemàtica.

Així, aquest material docent, la primera edició del qual va nàixer en 2012 dins el marc del conveni per a la promoció de l'ús social del valencià signat per la Universitat d'Alacant amb la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana, està constituït per quatre capítols ben diferenciats que contenen els principals resultats teòrics, acompanyats per les demostracions corresponents, amb exemples, il·lustracions gràfiques, observacions i notes clarificadores que ajuden el lector a comprendre millor els conceptes i a veure com, i sota quines condicions, es poden aplicar aquests resultats. Així mateix, al començament de cada un dels capítols s'afegeix una motivació, en forma de pinzellades, que està dirigida als lectors com a element introductori de cadascun ells. També al final de cada un d'ells s'inclouen exercicis, de dificultat variada, relacionats amb cada apartat teòric per tal de que el lector practique per si mateix.

D'aquesta manera, el llibre comença amb una introducció dels nombres naturals, enters, racionals i reals. S'hi detallen les seues principals propietats tals com el principi d'inducció o l'axioma del suprem, és a dir, els fonaments bàsics relatius a les propietats estructurals dels nombres reals i dels seus subconjunts característics, sense precisar cons-

truccions formals, utilitzant la via axiomàtica, i, això sí, construint les potències, de base real positiva i exponent real, i les arrels n -èsimes, que permetran més endavant introduir per exemple la funció logaritme.

El segon capítol està dedicat completament a l'estudi de les successions de nombres reals. Després d'analitzar intuïtivament la noció de límit d'una successió de nombres reals, resulta important establir aquest concepte de límit en termes de ε i n_0 , proporcionar exemples i insistir posteriorment en el seu maneig. Així, s'hi incideix en els diferents tipus de successions existents, en les seues propietats al voltant de la noció de convergència i en les eines sobre el càlcul de límits. Fins i tot, la construcció del nombre e i la seua irracionalitat formen part d'aquest capítol.

El tercer d'ells arplega especialment les nocions de límit (incloent els casos de límits infinits i límits en l'infinít) i continuïtat de funcions reals de variable real. En efecte, després de motivar geomètricament els conceptes, i ressaltant el seu caràcter local, l'objecte bàsic d'interés d'aquest capítol és el concepte de límit d'una funció i continuïtat d'una funció en un punt a través de la proposta heretada de Weierstrass, fent també insistència en la seua importància com a peces clau sobre les quals es recolza tot l'estudi posterior. El maneig d'estes definicions, a través de diversos exemples i exercicis proposats, es fa indispensable. S'hi presenten els principals teoremes tant a escala local com global, així com algunes tècniques de càlcul de límits. Els conceptes topològics necessaris s'introdueixen també en la primera part del capítol.

Finalment, l'últim capítol del text està dedicat a l'estudi de les funcions derivables i les seues aplicacions al càlcul de límits, extrems relatiu o curvatura d'una funció real de variable real. En particular, la introducció de la derivada d'una funció es motiva per mitjà del problema de trobar la tangent del gràfic d'una funció en un punt, que enllaça de seguida amb la seua definició formal i, a manera d'exemples, a calcular formalment les derivades de les principals funcions elementals: funcions constants, polinomis, valor absolut, exponencials, logaritmes, sinus, cosinus..., deduint a continuació la relació òbvia amb la noció de continuïtat.

Aquests objectius formatius estan també encaminats a tractar els aspectes següents: capacitar l'alumne per a l'accés i comprensió de la literatura específica sobre els seus continguts, dotant-lo d'un domini del vocabulari tècnic i bàsic d'aquest camp; conèixer els fonaments formals de la matèria pròpia de l'assignatura com a punt de partida per al futur desenvolupament i ampliació de la disciplina; proporcionar una formació sòlida en els fonaments formals de la matèria i desenvolupar habilitats en l'aspecte pràctic del seu maneig; aplicar els coneixements i les tècniques apreses a situacions concretes que es presenten al voltant de les mateixes; i en general conèixer el context de l'àrea de l'Anàlisi Matemàtica. És a dir, es tracta de desenvolupar i millorar la capacitat d'abstracció, el pensament quantitatiu, el raonament crític, l'extracció de conclusions o l'expressió clara i formal.

Aquest material docent es pot complementar amb la resta de continguts formatius bàsics que formen un primer curs complet d'Anàlisi Matemàtica, tals com les sèries numèriques, les integrals de Riemann o el càlcul de primitives, i amb llibres de caràcter pràctic que aglutinen una gran quantitat d'exercicis resoltos. Precisament, la relació de

llibres i recursos de la bibliografia està formada pels textos que, en opinió dels autors, tenen els continguts més adients per complementar o bé ampliar els diferents temes que s'han desenvolupat al llarg d'aquesta obra. Sense dubte, poden servir per a disposar d'una perspectiva més àmplia dels continguts que s'han vist i per millorar les destreses pràctiques. En aquest sentit, els materials [21, 22] mostren algunes errades conceptuals i operatives, al voltant del primers continguts d'aquest manual, que se solen detectar en alguns alumnes en una fase no avançada d'estudi. Altres referències, especialment [20] però també [2, 3, 13, 14, 17], han sigut de forma complementària utilitzades per a confeccionar la motivació prèvia a cada capítol.

Dediquem aquest llibre a les nostres mares, per la seua estima, ajuda, paciència i sacrifici mostrats al llarg de tots aquests anys.

Els autors

Universitat d'Alacant, gener de 2018